Magische Nummerierungen bei Polyedern

Lieben Sie geometrische Knobeleien mit Zahlen ? Dann versuchen Sie doch einmal, die Kanten eines Würfels so zu nummerieren, dass für jede der Würfelseiten die Addition ihrer Kantennummern den gleichen Wert ergibt.

Der Würfel mit seinen 8 Ecken, 6 Flächen und 12 Kanten ist wohl das bekannteste Polyeder. Seine Kanten lassen sich mit den Zahlen 1, 2,…,12 nummerieren, wobei eine Nummerierung auf viele Weisen möglich ist. Sie kann z.B. auch "punktsymmetrisch" oder "spiegelbildlich" sein. Damit ist gemeint, dass Im ersten Fall die Nummern von symmetrisch zum Würfelmittelpunkt, im zweiten Fall, spiegelbildlich zueinander gelegenen Kanten stets die Summe 13 ergeben.
Wie kann man nun (zusätzlich) eine Nummerierung so gestalten, dass die vier Kantennummern jeder der sechs Würfelflächen die gleiche Summe ergeben ?
Da das Mittel aller Kantennummern 6,5 lautet, muss die Kantennummernsumme jeder Fläche 4 x 6,5 = 26 betragen.
Der Würfel kann so positioniert werden, dass die vordere obere Kante die Nr. 1 trägt und die linke obere Kante eine kleinere Nr. hat als die rechte obere Kante. Hierzu gibt es 40 verschiedene Nummerierungen mit Kantensumme 26 für jede Fläche, aber keine ist punkt- oder spiegelsymmetrisch. Dafür hat die Nummerierung in Fig.1 die Eigenschaft, dass die Quadratsummen der Kantennummern gegenüberliegender Flächen auch jeweils gleich sind; zusätzlich ist sie symmetrisch zu einer Geraden durch die Mittelpunkte von Deckel- und Bodenfläche.

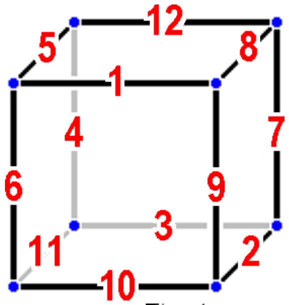


Fig. 1

Eine Nummerierung von Kanten (oder auch von Ecken) eines Polyeders, bei der die Summe der Nummern für jede Fläche gleich ist, soll "magisch" genannt werden in Anlehnung an magische Quadrate, bei denen die Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen der Einträge sich ebenfalls stets gleichen.

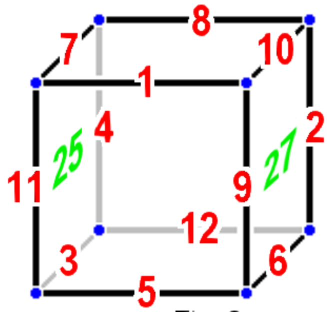


Fig. 2

Eine magische, zum Würfelmittelpunkt punktsymmetrische Nummerierung erweist sich nun als beinahe erreichbar (Fig. 2).
Sollen andererseits für jede der acht Würfelecken deren Summen ihrer drei zugehörigen Kantennummern den gleichen Wert haben, so steht man vor dem Problem der Ganzzahligkeit: die Kantensumme jeder Ecke müsste 3 x 6,5 = 19,5 lauten !

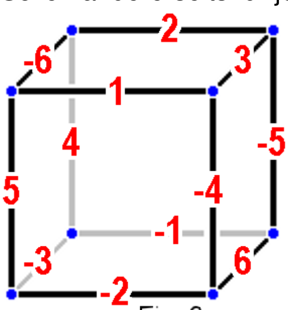


Fig. 3

Eine andere, neue Art der Nummerierung wird gesucht.
Die Idee, nicht die Zahlen 1, 2,…,12 zu verwenden, sondern auch negative Zahlen zuzulassen, z.B. die 12 Zahlen ±1, ±2, …, ±6 zu verwenden, erweist sich als sehr erfolgreich. Die Kantensummen punktsymmetrisch gegenüber gelegener Kanten, der acht Ecken sowie der 6 Flächen in Fig. 3 ergeben stets Null. Wird nun zu jeder Kantennummer die Zahl 7 addiert, dann entsteht eine Nummerierung mit Zahlen 1, 2,…, 13, ohne die 7, mit den Eigenschaften:

Kantensummen gegenüberliegender Kanten:	je 2 x 7 = 14
Kantensummen der acht Ecken:	je 3 x 7 = 21
Kantensummen der sechs Flächen:	je 4 x 7 = 28.

Wie ist es nun um magische Nummerierungen von Ecken eines Würfels mit den Zahlen 1, 2, …, 8 bestellt ?
Die Eckensumme jeder Fläche muss 4 x 4,5 = 18 betragen.

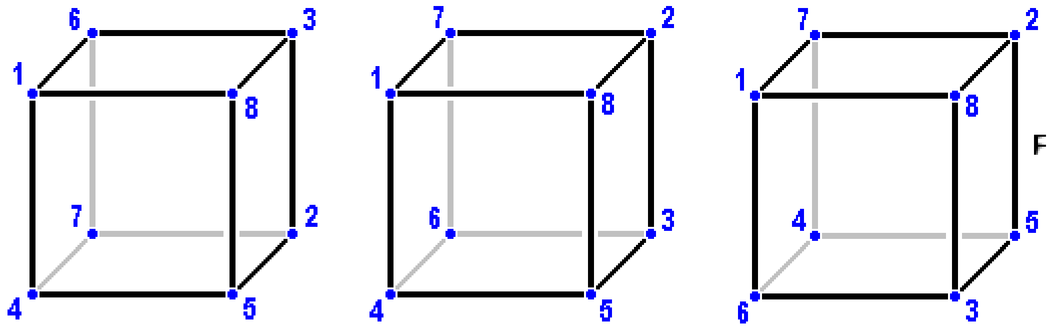
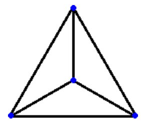


Fig. 4

Hier gibt es drei wesentlich verschiedene Lösungen, sie sind alle spiegelsymmetrisch, weswegen zusätzlich die Quadratsummen der Eckennummern für die rechte und die linke Quadratfläche jeweils übereinstimmen.

Bei Polyedern, deren Flächen sämtlich eine gerade Anzahl von Ecken besitzen und für Polyeder mit ungerader Anzahl von Kanten bzw. Ecken lohnt es sich, nach magischen Kanten- oder Eckennummerierungen zu suchen. Im ersten Fall hat man nicht das oben erwähnte Problem mit der Ganzzahligkeit, im zweiten Fall auch nicht, da die mittlere Kanten- bzw. Eckennummer eine ganze Zahl ist. Bei anderen Polyedern kommt ein Versuch mit zur Zahl 0 symmetrischen Nummern, wie in Fig. 3, in Frage.

Das einfachste Polyeder ist das Tetraeder mit 4 Ecken, 4 Flächen und 6 Kanten, hier erfordert die Bedingung “magisch“ für Kanten- oder Eckennummerierung dass zwei verschiedene Kanten bzw. Ecken die gleiche Nummer tragen müssen, daher gibt es für das Tetraeder keine Lösung.



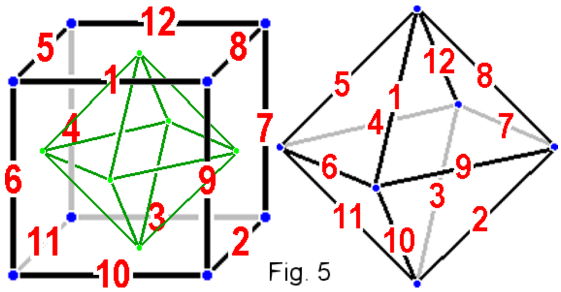


Fig. 5

Beim nächsten platonischen Körper, dem Oktaeder, kann man sich auf den Würfel berufen, denn diese Körper sind dual zueinander, d.h. sie gehen – grob gesagt – durch eine Vertauschung Ecken <=> Flächen auseinander hervor. Die magischen Nummerierungen von Fig. 1 bis Fig. 4 lassen sich auf das Oktaeder übertragen, wir zeigen dies anhand von Fig. 1; aus Flächensumme 26 beim Würfel wird Eckensumme 26 beim Oktaeder.

Es gibt noch zwei weitere platonische Körper: Dodekaeder und Ikosaeder, sie sind zu einander dual, deswegen kann man sich beschränken auf das Dodekaeder mit 20 Ecken, 12 Flächen und 30 Kanten. Da alle seine Flächen Fünfecke sind, in jeder Ecke 3 Kanten zusammen kommen und zudem seine Kanten- und Eckenanzahl gerade ist, gibt es keine Möglichkeit für magische Nummerierungen, die, mit 1 beginnend, fortlaufen; man ist auf zur Zahl 0 symmetrische Zahlenmengen angewiesen. Eine Kantennummerierung gelingt mit $\pm1, \ldots, \pm16$ unter Fortlassen von ±8 und die Eckennummerierung mit den Zahlen $\pm1, \ldots, \pm11$, wobei ±6 nicht vorkommt; die Lösungen sind beide punktsymmetrisch.

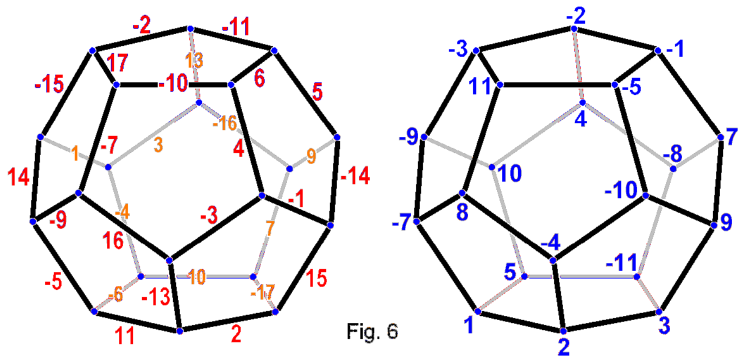


Fig. 6

Für Polyeder gibt es verschiedene Typen magischer Nummerierungen, die durch bestimmte Zeichenfolgen beschreibbar sind. Ein erster Buchstabe E, F oder K gibt an, ob Ecken, Flächen oder Kanten nummeriert werden, der zweite (und eventuell dritte) Buchstabe E oder F sagt, ob Ecken- oder Flächensummen konstant sein sollen. Ein angehängter Buchstabe C gibt an, dass die Nummerierung “klassisch“, also mit 1 beginnend, fortlaufend ist, ein angehängter Buchstabe S soll besagen, dass die Nummerierung punkt- oder spiegelsymmetrisch ist.

Somit gilt: Fig. 1 => KFC, Fig. 2 => KFCS-fast, Fig. 3 => KFS, Fig. 4 => EFCS, Oktaeder in Fig. 5 => KEC, Fig. 6 links => KFES, Fig. 6 rechts => EFS.

Eine Lösung vom Typ KFE erfordert E+F Bedingungen für nach Eulers Polyederformel K = E + F – 2 Variable, wird also nicht für jedes Polyeder existieren.

Das Rhombendodekaeder mit 14 Ecken, 12 Vierecksflächen und 24 Kanten, erlaubt eine Nummerierung

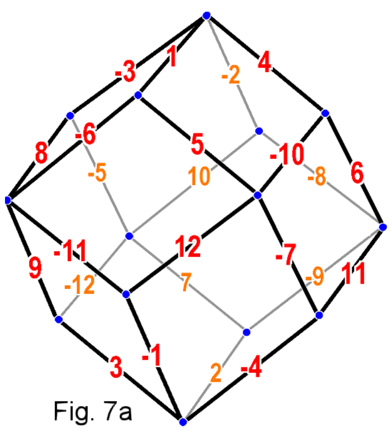


Fig. 7a

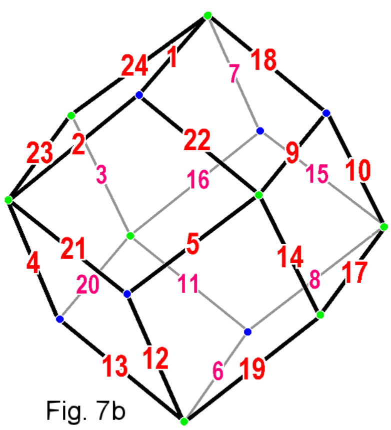


Fig. 7b

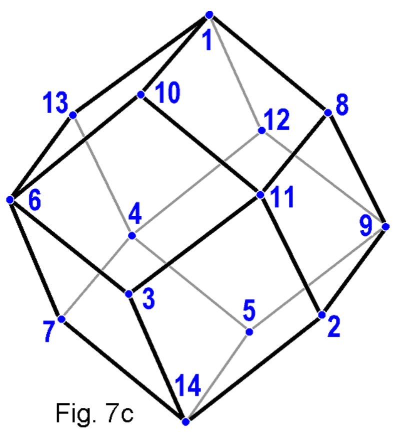


Fig. 7c

vom Typ KFE (Fig. 7a) mit den Zahlen $\pm1, \pm2, \ldots, \pm12$, allerdings mit einer komplizierten Symmetrie

Die klassische Nummerierung KFCS in Fig. 7b ist spiegelsymmetrisch; hier haben gegenüber liegende Kanten die Summe 25 und alle Flächen, alle sechs 4-wertigen Ecken sowie zwei der acht 3-wertigen Ecken (grün) die Kantensumme 50. In der punktsymmetrischen Fig. 7c vom Typ EFCS haben gegenüberliegende Ecken die Summe 15 und alle Flächen die Eckensumme 30 (es gibt 12 solcher Lösungen).

Prismen mit n Seiten haben 2n Ecken, n+2 Flächen und 3n Kanten. Bei ungeradem n ist die mittlere Kantennummer (3n+1)/2 eine ganze Zahl, es gelingen Nummerierungen vom Typ KFC.
Hingegen sind Lösungen der Typen KEC und EFC nur beinahe erreichbar. In Fig. 8a haben Dreiecke bzw. Quadrate die Kantensumme 15 bzw. 20, zudem Boden- und Deckeldreieck die gleiche Quadratsumme.

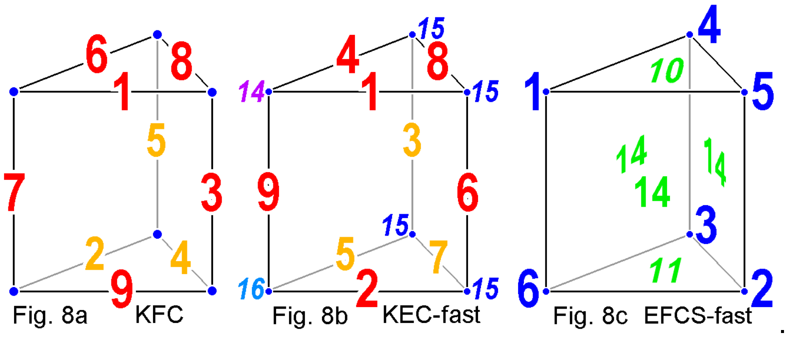


Fig. 8a KFC — Fig. 8b KEC-fast — Fig. 8c EFCS-fast

Entsprechendes gilt für das fünfseitige Prisma: In Fig. 9a sind die Quadratsummen für das vordere und hintere Fünfeck gleich.

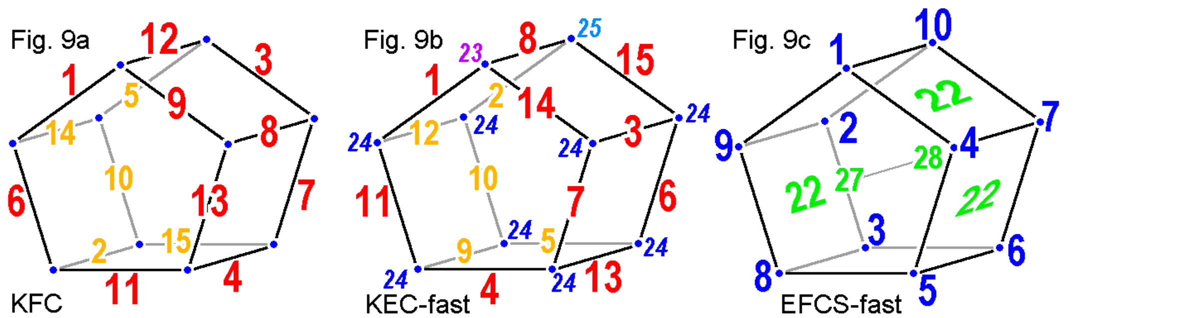


Fig. 9a KFC — Fig. 9b KEC-fast — Fig. 9c EFCS-fast

Darstellungen für das 7-seitige Prisma erfolgen mit Hilfe von Schlegel-Diagrammen:

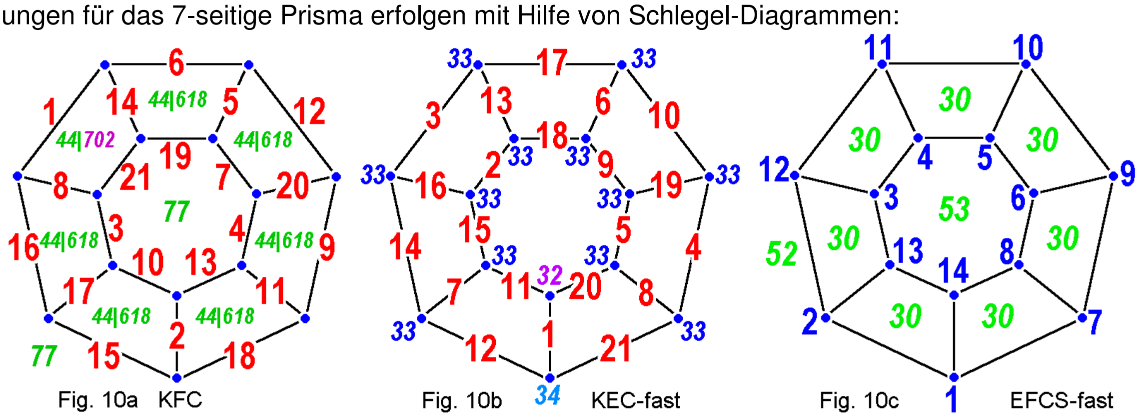


Fig. 10a KFC — Fig. 10b KEC-fast — Fig. 10c EFCS-fast

Zur Fig. 10a hat man 21 Variable für die Kantennummern, aber zunächst nur 9 Bedingungen für die Kantensummen der Flächen. So gelingt es, eine Lösung zu konstruieren, bei der 6 der 7 Vierecke zusätzlich die gleiche Kantennummern-Quadratsumme 618 haben. 702 ist hier die bestmögliche Annäherung an 618.

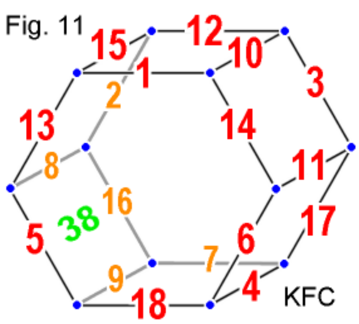


Fig. 11 KFC

Alle Vierecksflächen des sechsseitigen Prismas (Fig. 11) haben die Kantensumme 2 x 19 = 38, die beiden Sechsecke die Kantensumme 3 x 19 = 57. Die Nummerierung vom Typ KFC ist symmetrisch zur Geraden durch die Mittelpunkte der Sechsecke mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Quadratsummen der Kantennummern der Sechsecke überein stimmen. Es gibt bis auf Drehungen und Spiegelungen genau eine solche Lösung.

Beim quadratischen Antiprisma (Fig. 12) mit 8 Ecken, 10 Flächen und 16 Kanten ist 8,5 die mittlere Kantensumme. Da in jeder Ecke 4 Kanten zusammen kommen, lohnt sich die Suche nach einer Nummerierung vom Typ KEC. Diese erfordert achtmal die Kantensumme 34. Zusätzlich sollen Boden- und Deckelquadrat ebenfalls Kantensumme 34 haben, ferner gegenüber liegende Dreieckskanten die Summe 17.

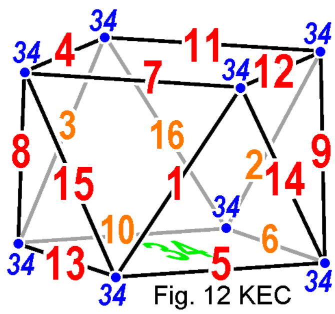
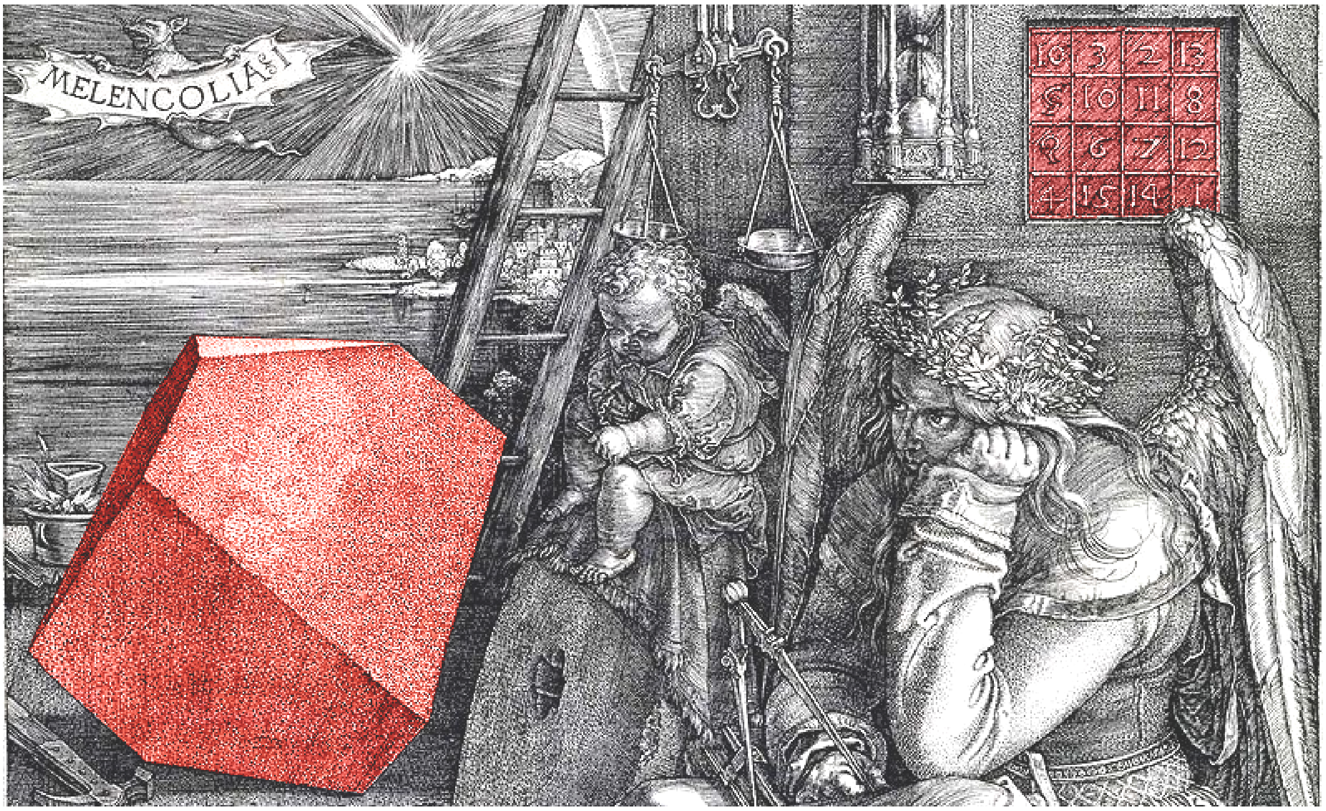


Fig. 12 KEC

Diese Konfiguration erinnert sehr an ein klassisches magisches 4x4-Quadrat. Auch dort tritt zehnmal (4 Zeilen-, 4 Spalten- und 2 Diagonalensummen) die Summe 34 auf, jeweils gebildet aus vier der Zahlen 1, …, 16.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Ein berühmtes magisches 4x4-Quadrat findet sich (rot eingefärbt) auf dem Bild “Melencolia“ von Albrecht Dürer (Bildausschnitt unten). In der vierten Zeile dieses Quadrats stehen die Zahlen 15 und 14; Das Jahr 1514 ist das Todesjahr der Mutter von Dürer.
Auf dem Melencolia-Bild ist, rot eingefärbt,auch ein Polyeder dargestellt.



Dieser Körper hat 12 Ecken, 8 Flächen (2 Dreiecke, 6 Fünfecke) und 18 Kanten. Klassische Kanten- oder Eckennummerierungen sind hier unmöglich, es kommen aber Nummerierungen mit Zahlenmengen symmetrisch zur Null in Frage (Fig. 13).

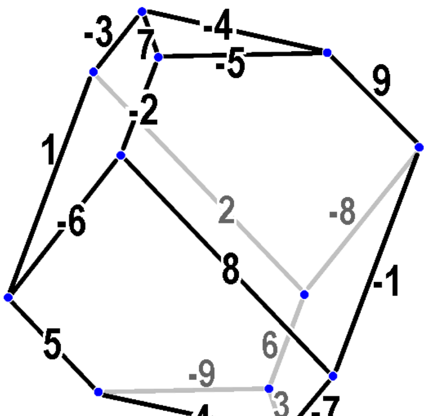


Fig. 13a KE

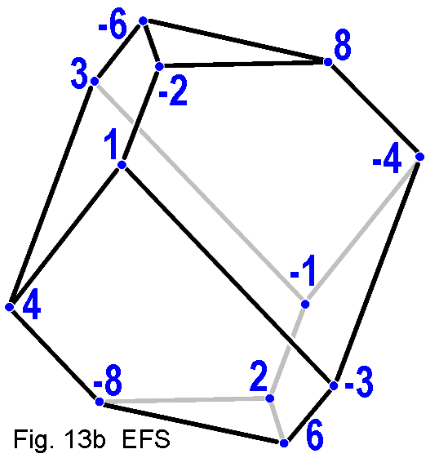


Fig. 13b EFS

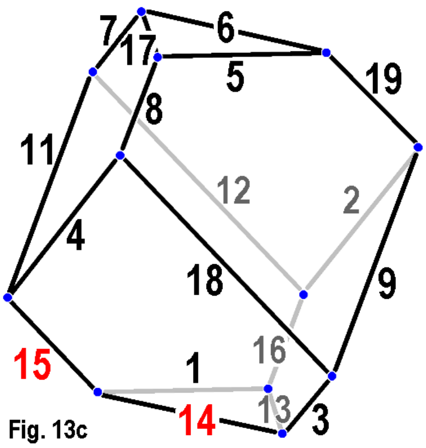


Fig. 13c

In Fig. 13a geschieht die Nummerierung der Kanten mit ±1, …, ±9; die 3 Kanten jeder Ecke ergeben die Summe Null. Fig. 13b zeigt eine punktsymmetrische Eckennummerierung unter Verwendung der 12 Zahlen ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 und ±8; alle acht Flächen haben Eckensumme Null.
Wird in Fig. 13a zu jeder Kantennummer die Zahl 10 addiert so ergibt sich die Kantensumme 30 für alle zwölf Ecken (Fig. 13c) und bei zwei der unteren Kanten erscheinen die 15 und die 14.